

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Аннотация

Актуальность и цели. В нелинейной теории упругости в настоящее время отсутствует единое уравнение состояния, подобное закону Гука в линейной теории. Разработка новых эластомерных материалов, исследование различных биологических материалов приводит к необходимости создания новых моделей отклика на внешние воздействия. В рамках гиперупругости это приводит к появлению новых математических выражений для потенциала энергии деформации. В коммерческих пакетах, предназначенных для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из эластомеров, выражения для потенциала энергии деформации жестко заданы. Для учета новых моделей приходится создавать новые пакеты прикладных расчетов. Их верификация проводится на известных точных решениях. Целью работы является нахождение некоторых точных решений одной модельной задачи с разными потенциалами.

Материалы и методы. В качестве задачи, для которой отыскиваются точные решения, рассматривается задача о конечном продольном сдвиге круговой цилиндрической втулки между жесткими концентрическими обоймами. С одной стороны, это одна из простейших задач, с другой стороны, она имеет прикладное значение, поскольку это одна из конструкций амортизатора сдвига. Рассматриваемая задача решалась многими авторами для различных потенциалов.

Результаты. В данной работе получены точные решения для двух потенциалов, для которых нам не удалось найти решения в литературе. Решения получены полубратным методом.

Выводы. Практическая значимость точных решений не исчерпывается их применением для верификации численных методов, они позволяют исследовать эффекты, не описываемые линейной теорией. Показано, что различие потенциалов приводит не только к количественному, но и к качественному различию решений.

Ключевые слова: конечная антиплоская деформация, гиперупругий несжимаемый материал, потенциалы энергии деформации, точные решения.

Yu. Yu. Andreeva, B. A. Zhukov

EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF A PROBLEM OF THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY FOR TWO POTENTIALS OF DEFORMATION ENERGY OF AN INCOMPRESSIBLE MATERIAL

© 2018 Андреева Ю. Ю., Жуков Б. А. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. In the non-linear elastic theory at the present moment there is no uniform equation of state, similar to the Hooke law in the linear theory. Development of new elastomeric materials, research of various biological materials results in need of creation of new models of a response to external influences. Within a hyper elasticity it leads to emergence of new mathematical expressions for strain energy potential. In the commercial packages intended for calculation of an intense strained state of designs from elastoplastics, expressions for the potential of strain energy are rigidly set. For accounting of new models it is necessary to create new packages of applied calculations. Their verification is carried out on the known precise decisions.

Materials and methods. The purpose of work is finding of some precise solutions of one model task with different potentials. As a task for which precise decisions are found the task about terminating longitudinal shift of the circular cylindrical plug between rigid concentric holders is considered. On the one hand it is one of the simplest tasks, on the other hand it has applied value as it is one of shift shock-absorber designs.

Results. The considered problem was solved by many authors for various potentials. In this work precise decisions for two potentials specified in are received for which we did not manage to find solutions in literature. Decisions are received by the semi-inverse method.

Conclusions. The practical significance of precise decisions is not exhausted their application for verification of numerical methods, they allow to investigate the effects which are not described by the linear theory. It is shown that the distinction of potentials brings not only to the quantitative, but also to qualitative distinction of decisions.

Key words: finite antiplane deformation, hyperelastic incompressible material, the potential energy of deformation, exact solution

Введение

Решение задач нелинейной теории упругости для резиноподобных материалов осложняется тем, что неизвестен вид уравнения состояния, описывающий с приемлемой точностью их поведение при любых видах нагружения, подобно закону Гука в линейной теории. На данный момент известно множество моделей, которые хорошо согласуются с экспериментом при одном виде нагружения и плохо при другом для конкретных материалов. В работе [1] приведены 32 известные модели гиперупругих изотропных несжимаемых материалов и предлагаются новые. В работе [2] можно найти еще 12 моделей, неупомянутых в [1].

В распространенных коммерческих CAE-пакетах представлены в основном полиномиальные модели вида

$$W = \sum_{i,j} c_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j.$$

Здесь I_1, I_2 – главные алгебраические инварианты тензора деформаций Коши, причем в ANSYS для несжимаемого гиперупругого материала всего две: Муни – Ривлина и Арруды – Бойса. В пакете SolidWorks несжимаемые гиперупругие материалы представлены тоже двумя моделями: Муни – Ривлина и Огдена. Более широкий спектр полиномиальных моделей предлагает ABAQUS. Для материалов, описываемых моделями, выражающимися

через I_1, I_2 трансцендентно или иррационально, приходится разрабатывать оригинальные численные пакеты. Для верификации новых пакетов необходимы точные решения задач нелинейной теории упругости для выбранной модели материала в условиях неоднородной деформации. Существует пакет с открытым вводом потенциала Магс, но и его приходится верифицировать для новых потенциалов [3]. Целью работы является нахождение некоторых точных решений одной модельной задачи с разными потенциалами. Точные решения позволяют исследовать эффекты, которые не описываются линейной теорией.

Наиболее простым видом двумерной неоднородной деформации, позволяющей найти точные решения, является антиплоская деформация. Ситуация осложняется тем, что для несжимаемых материалов конечная антиплоская деформация возможна только в телах с потенциалами энергии деформации, удовлетворяющими условиям, сформулированным в [4]. Она всегда возможна в материалах с обобщенным неогуковским потенциалом $W = W(I_1)$. Для потенциалов вида $W = W(I_1, I_2)$ антиплоская деформация возможна, например, в материале Муни – Ривлина и некоторых других. В общем случае реализуется более сложная цилиндрическая деформация [5, 6].

1. Постановка задач статики при конечной антиплоской деформации

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [7]. Общая постановка задач нелинейной упругости приводится к форме, удобной для дальнейшего рассмотрения [5]. Ориентируем пространственную декартову систему координат так, чтобы радиус-векторы точек в текущей $\mathbf{R}$ и отсчетной $\mathbf{r}$ конфигурациях соответственно имели вид

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + [z + w(x, y)]\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1)$$

где (x, y, z) – координаты точек в отсчетной конфигурации, выбранные в качестве материальных; $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – базис пространственной декартовой системы координат. Выражения (1) гарантируют, что деформация будет антиплоской.

Следуя [5], напряженное состояние однородного изотропного гиперупругого несжимаемого материала с потенциалом энергии деформации $W(I_1, I_2)$, где I_1, I_2 – главные инварианты тензора деформации Коши, можно описать с помощью тензора истинных напряжений Коши $\mathbf{S}$ в форме:

$$\mathbf{S} = 2 \left\{ \left[-\frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla w \nabla w + p \mathbf{E}_0 \right] + \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \times \right. \\ \left. \times (\nabla w \mathbf{k} + \mathbf{k} \nabla w) + \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \nabla w \cdot \nabla w + p \right] \mathbf{k} \mathbf{k} \right\}. \quad (2)$$

Через $\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}\mathbf{k}$ обозначен единичный тензор, p – функция гидростатического давления, $\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z$ – оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации.

Главные инварианты тензора деформации Коши получаются в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 = 3 + \nabla w \cdot \nabla w, \\ I_3 &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения равновесия в отсутствие массовых сил запишутся в форме

$$\begin{cases} \nabla p = \nabla \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla w \nabla w \right), \\ \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \nabla w \right] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Исключая функцию гидростатического давления в первом уравнении из (4), получим

$$\nabla \times \nabla \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla w \nabla w \right) = 0. \quad (5)$$

Итак, потенциал энергии деформации должен обеспечивать совместность второго уравнения из (4) и уравнения (5). Условия выбора потенциала приведены в [4]. Очевидно, что этим условиям удовлетворяет обобщенный неогуковский потенциал, так как для него $\partial W / \partial I_2 = 0$.

При цилиндрической деформации (в том числе и при антиплоской) цилиндрическая боковая поверхность переходит вновь в цилиндрическую поверхность с единичным вектором нормали $\mathbf{N} = N_x \mathbf{i} + N_y \mathbf{j}$, поэтому силовое граничное условие на боковой поверхности $\mathbf{N} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{f}$ запишется в виде

$$2\mathbf{N} \cdot \left[p\mathbf{E}_0 - \frac{\partial W}{\partial I_2} \nabla w \nabla w \right] = \mathbf{f}_{pl}, \quad (6)$$

$$2\mathbf{N} \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \nabla w = f_z. \quad (7)$$

Здесь плотность внешних усилий $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{pl} + f_z \mathbf{k}$, $\mathbf{f}_{pl} \cdot \mathbf{k} = 0$ рассчитывается на единицу площади боковой поверхности в деформированном состоянии (при антиплоской деформации площадь боковой поверхности не меняется). В выражении (6) величина $\mathbf{f}_{pl}$ задает плотность внешних сил в поперечной плоскости, необходимых для поддержания режима антиплоской деформации. Если этот режим поддерживается кинематически, то плотность усилий $\mathbf{f}_{pl}$ проявляется как реакция со стороны жестких обойм, между которыми заключено деформируемое цилиндрическое тело. В случае обобщенного неогуковского потенциала функция p полагается равной нулю и напряжения в поперечной плоскости отсутствуют. Кинематические граничные условия сводятся к заданию на внешней боковой поверхности величины продольного сдвига.

2. Модельная задача о конечном продольном сдвиге круговой цилиндрической втулки между жесткими концентрическими обоймами

В качестве задачи, для которой отыскиваются точные решения, рассматривается задача о конечном продольном сдвиге круговой цилиндрической втулки между жесткими концентрическими обоймами. С одной стороны, это одна из простейших задач, с другой стороны, она имеет прикладное значение, поскольку это одна из конструкций амортизатора сдвига. Внутренняя обойма неподвижна, а внешняя сдвигается вдоль оси симметрии на Δ . Отсчетная и деформированная конфигурации втулки приведены на рис. 1.

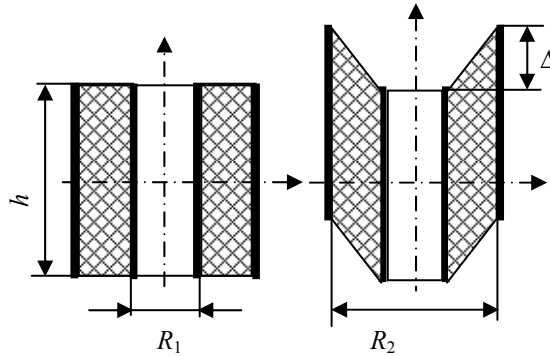


Рис. 1

В качестве материальных будем использовать координаты цилиндрической системы координат (r, φ, z) с единичным базисом: $\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ и осью OZ , направленной вдоль оси симметрии втулки. Оператор Гамильтона в этом базисе получается в форме: $\nabla = \mathbf{e}_1 \partial / \partial r + r^{-1} \mathbf{e}_2 \partial / \partial \varphi + \mathbf{k} \partial / \partial z$. В данном случае антиплоская деформация является и осесимметричной, т.е. $w = w(r)$ и $p = p(r)$, таким образом, выражения (1)–(4) перейдут в следующие (штрих означает производную по r):

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + w(r)\mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = 2 \left\{ \left[p(r)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - W_2(r)w'^2(r)\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \right] + \right. \\ \left. + (W_1(r) + W_2(r))w'(r)(\mathbf{e}_1 \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{e}_1) + [W_1(r)w'^2(r) + p(r)]\mathbf{k} \mathbf{k} \right\},$$

$$W_1(r) = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad W_2(r) = \frac{\partial W}{\partial I_2}; \quad (8)$$

$$I_1 = I_2 = 3 + w'^2(r),$$

$$\begin{cases} p'(r) = \frac{1}{r} \left[r W_2(r) w'^2(r) \right]', \\ \left[r (W_1(r) + W_2(r)) w' \right]' = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение (5) является следствием второго уравнения в (9), т.е. осесимметричный вариант антиплоской деформации существует для любого потенциала энергии деформации.

Кинематические граничные условия запишутся в форме

$$w(R_1) = 0, \quad w(R_2) = \Delta. \quad (10)$$

Найдем первый интеграл второго уравнения в (9):

$$[W_1(r) + W_2(r)]w'(r) = \frac{c}{r}, \quad c = \text{const}. \quad (11)$$

Единичный вектор внешней нормали к внешней боковой поверхности втулки с уравнением $r = R_2$ равен $\mathbf{e}_1$, поэтому сдвиговое усилие, рассчитанное на единицу длины втулки по (7), (8) и (11), получается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} / h &= \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{S}(R_2) R_2 d\varphi = \int_0^{2\pi} [S_{11}(R_2)\mathbf{e}_1 + S_{13}(R_2)\mathbf{k}] R_2 d\varphi = \\ &= 2\pi S_{13}(R_2) R_2 \mathbf{k} = 4\pi R_2 [W_1(R_2) + W_2(R_2)] w'(R_2) \mathbf{k} = 4\pi c. \end{aligned}$$

Откуда $c = Q(4\pi h)^{-1}$, $Q = |\mathbf{Q}|$. Таким образом, получаем

$$\sigma_{rz} = \frac{2c}{r} = \frac{Q}{2\pi h r}.$$

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta}{R_1}, \quad \kappa = \frac{R_2}{R_1}, \quad q = \frac{Q}{2\pi h R_1 \mu}, \\ v(\rho) &= \frac{w(R_1 \rho)}{R_1}, \quad \rho = \frac{r}{R_1}, \quad 1 \leq \rho \leq \kappa. \end{aligned}$$

Соответствие обозначений для производных получим в виде

$$\frac{dw(r)}{dr} = \frac{dv(\rho)}{d\rho} \Leftrightarrow w'(r) = \dot{v}(\rho).$$

С учетом этих соотношений выражение для касательного напряжения можно переписать:

$$\sigma_{rz}(\rho) = \frac{\mu q}{\rho}. \quad (12)$$

Выражение (12) не зависит от потенциала энергии деформации и совпадает с решением линейной теории.

В случае необходимости отыскания напряженного состояния в поперечной плоскости из первого уравнения в (9) находится функция гидростатического давления:

$$p = \int_{R_1}^r \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left[t W_2(t) w'^2(t) \right] dt + \mu p_0 = \int_1^{\rho} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left[t W_2(t) \dot{v}^2(t) \right] dt + \mu p_0.$$

Безразмерная константа интегрирования p_0 находится из условия равенства нулю главного вектора на торцевой поверхности. Поскольку поперечная плоскость при антиплоской деформации депланируется, то равенство нулю главного вектора в этой плоскости проще всего учесть с помощью несимметричного тензора Пиолы – Кирхгофа $\mathbf{D}$, получаемого из тензора Коши с помощью соотношения $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{S}$, записанного для несжимаемого материала. Вектором единичной нормали к поперечному сечению в отсчетной конфигурации является вектор $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} r dr d\varphi &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} [D_{31} \mathbf{e}_1 + D_{33} \mathbf{k}] r dr d\varphi = \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} D_{33} r dr \mathbf{k} = 4\pi R_1^2 \int_1^{\kappa} [p - W_2(\rho) \dot{v}(\rho)] \rho d\rho \mathbf{k} = \\ &= 4\pi \mathbf{k} R_1^2 \int_1^{\kappa} \left[\int_1^{\rho} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \left[t W_2(t) \dot{v}^2(t) \right] dt + \mu p_0 - W_2(\rho) \dot{v}(\rho) \right] \rho d\rho = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Получили уравнение для нахождения p_0 .

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$[W_1(\rho) + W_2(\rho)] \dot{v}(\rho) = \frac{\mu q}{2\rho}. \quad (14)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение используется для нахождения функции деформации поперечного сечения $w(r) = R_1 v(r/R_1)$.

3. Выбор моделей изотропного несжимаемого гиперупругого материала

Рассматриваемая задача решалась многими авторами для различных потенциалов. Остановимся на некоторых из тех потенциалов [1], для которых нам не удалось найти решения в литературе. Поскольку для однородных материалов первого порядка W_1 и W_2 являются функциями только $\dot{v}(\rho)$ и некоторых параметров, то при подстановке конкретного выражения для потенциала энергии деформации в уравнение (14) оно превращается в алгебраическое или трансцендентное уравнение относительно $\dot{v}(\rho)$. Успех в получении явного выражения для точного решения $v(\rho)$ зависит от возможности получения явного выражения для решения этого уравнения относительно $\dot{v}(\rho)$. Получение такого решения всегда возможно для алгебраических уравнений

степени не выше четвертой. Для трансцендентных уравнений получение явного выражения для решения проблематично.

3.1. Решение для потенциала Фунга

Здесь и ниже μ – модуль сдвига линейной теории упругости. Хотя уравнение (14) для потенциала Фунга [1] $W = (\mu / (2\beta)) [\exp(\beta(I_1 - 3)) - 1]$, трансцендентное относительно $v(\rho)$:

$$e^{\beta(v(\rho))^2} v(\rho) = \frac{q}{\rho}, \quad (15)$$

тем не менее решение дифференциального уравнения найдено и выражается через функцию Ламберта $\text{Lambert } W(z)$ [7] и экспоненциальный интеграл

$$\text{Ei}(z, a) = \int_1^\infty e^{-tz} t^{-a} dt :$$

$$v(\rho) = q \left\{ e^{-A(\rho)} - e^{-A(1)} + \frac{1}{2} [\text{Ei}(1, A(\rho)) - \text{Ei}(1, A(1))] \right\},$$

$$A(\rho) = \frac{1}{2} \text{Lambert } W \left(\frac{2\beta q^2}{\rho^2} \right). \quad (16)$$

Это утверждение проверяется непосредственной подстановкой (16) в (15). Для справки приводим соотношение [7]:

$$\frac{d}{dz} L = e^{-L} / [1 + L], \quad L = \text{Lambert } W(z).$$

Из (16) получаем жесткостную кривую резинометаллического амортизатора:

$$\delta = q \left\{ e^{-A(\kappa)} - e^{-A(1)} + \frac{1}{2} [E_i(1, A(\kappa)) - E_i(1, A(1))] \right\}. \quad (17)$$

При $\beta \rightarrow 0$ потенциал Фунга стремится к потенциалу Трелоара $W = \mu(I_1 - 3)/2$, и выражение (17) стремится к известному выражению $\delta = \ln(\kappa)q$. На рис. 2 представлены кривые (17) для $\beta = 2$ (кривая 1) и $\beta = 0,9$ (кривая 2). Штрихованная прямая соответствует потенциалу Трелоара. Во всех случаях $\kappa = 2$. Видно, что зависимости нелинейные и приближаются с уменьшением β к зависимости Трелоара снизу, т.е. описывают более жесткие материалы.

Поскольку потенциал Фунга относится к классу обобщенных неогуковских потенциалов, то напряженное состояние в поперечной плоскости не возникает. Представляет интерес рассмотрение потенциала, зависящего от обоих главных алгебраических инвариантов I_1, I_2 . В этом случае возникает поле напряжений в поперечной плоскости.

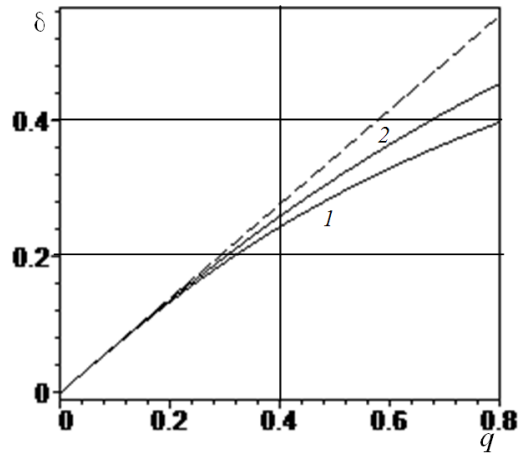


Рис. 2

3.2. Решение для потенциала Гента – Томаса

Выражение для потенциала Гента – Томаса [1]

$$W = \mu \left[\frac{3-2\beta}{6} (I_1 - 3) + \beta \ln \frac{I_2}{3} \right], \quad 0 \leq \beta < \frac{3}{2},$$

приведено в форме, при которой уравнение состояния с этим потенциалом при малых деформациях переходит в закон Гука.

Уравнение (14) для потенциала Гента – Томаса эквивалентно алгебраическому уравнению третьего порядка относительно $\dot{v}(\rho)$:

$$(2\beta - 3)\rho [\dot{v}(\rho)]^3 + 3q [\dot{v}(\rho)]^2 - 9\rho \dot{v}(\rho) + 9q = 0.$$

Поскольку уравнение имеет вещественные коэффициенты, то у него либо три вещественных корня, либо два комплексно сопряженных и один вещественный корень. В нашем случае для значений $0 \leq q < 0,8$, $0 \leq \beta < 3/2$ реализуется второй вариант. Единственный вещественный корень имеет вид

$$\dot{v}(\rho) = \frac{i \left[(i - \sqrt{3})q^2 + 2iqH^{1/3} + (i + \sqrt{3})H^{2/3} + 3(i - \sqrt{3})\rho^2(2\beta - 3) \right]}{2H^{1/3}(2\beta - 3)\rho}; \quad (18)$$

$$H = -q^3 - 9q(2\beta^2 - 5\beta + 3)\rho^2 + 3(2\beta - 3)\rho \times \\ \times \sqrt{q^4 + 3(3\beta^2 - 6\beta + 2)q^2\rho^2 + 3(3 - 2\beta)\rho^4}.$$

По (18) находятся выражение для $v(\rho)$ и жесткостная кривая амортизатора:

$$v(\rho) = \int_1^\rho \dot{v}(t) dt, \quad \delta = \int_1^\kappa \dot{v}(\rho) d\rho. \quad (19)$$

При $\beta \rightarrow 0$ потенциал Гента – Томаса стремится к потенциалу Трелоара. На рис. 3 представлены кривые (19) для $\beta=1,3$ (кривая 1) и $\beta=1,0$ (кривая 2). Штрихованная прямая соответствует потенциалу Трелоара. Во всех случаях $\kappa=2$. Видно, что зависимости нелинейные и приближаются с уменьшением β к зависимости Трелоара сверху, т.е. описывают более мягкие материалы.

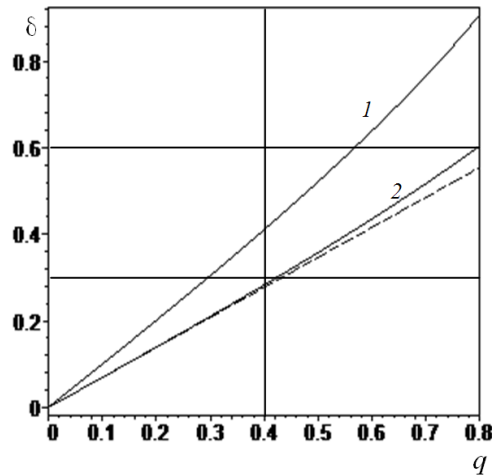


Рис. 3

Представляет интерес сравнение распределения тангенциальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi} = S_{22}$, не учитываемых линейной теорией, с касательными напряжениями от продольного сдвига σ_{rz} .

Для потенциала Гента – Томаса $W_2 = \mu\beta[\dot{v}^2(\rho) + 3]^{-1}$ и уравнение (13) можно переписать в виде

$$p_0 = \frac{2}{1-\kappa^2} \int_1^\kappa \left[\int_1^\rho \frac{1}{t} dt \left[\frac{\beta \rho \dot{v}^2(t)}{[\dot{v}^2(t) + 3]} \right] dt - \frac{\beta}{[\dot{v}^2(\rho) + 3]} \dot{v}(\rho) \right] \rho d\rho. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20), получим выражение для нахождения p_0 , которое не приводится из-за громоздкости. Для примера на рис. 4 представлены зависимости p_0 от q для $\beta=1,3$ (кривая 1) и $\beta=1$ (кривая 2). В обоих случаях $\kappa=2$.

Для тангенциального напряжения получаем выражение

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2p = 2\mu \left[\int_1^\rho \frac{1}{t} dt \left[\frac{\beta \rho \dot{v}^2(t)}{[\dot{v}^2(t) + 3]} \right] dt + p_0 \right]. \quad (21)$$

Подставляя (18) в (21), получим окончательное выражение. На рис. 5 представлены распределения относительных напряжений σ_{rz}/μ (кривая 1)

и $\sigma_{\varphi\varphi}/\mu$ (кривая 2) при $\beta=1,3$ и $\kappa=2$. Видно, что концентрация тангенциальных напряжений вполне сопоставима с концентрацией касательных напряжений.

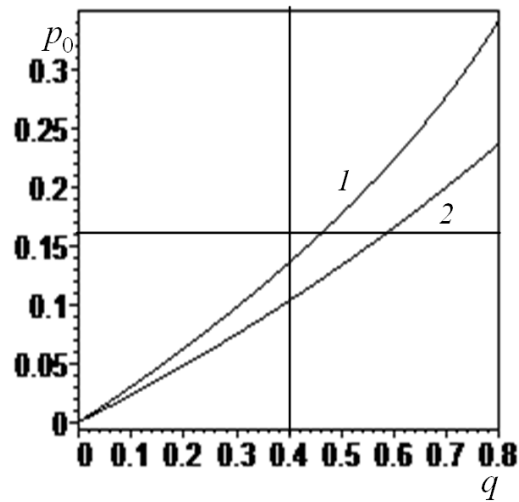


Рис. 4

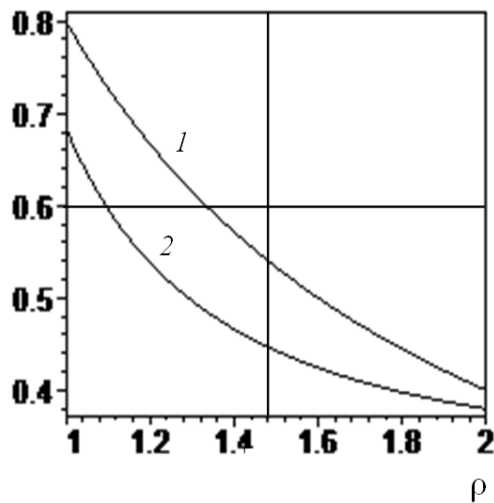


Рис. 5

Заключение

Получены новые точные аналитические решения одной задачи нелинейной теории упругости для двух потенциалов энергии деформации несжимаемого материала. В качестве модельной рассматривалась известная задача об антиплоской осесимметричной деформации цилиндрической втулки между жесткими концентрическими обоймами. Исследован нелинейный эффект возникновения напряженного состояния в поперечной плоскости под действием конечного продольного сдвига. Полученные решения предназначены для верификации численных методов.

Библиографический список

1. **Hossa, L.** A new constitutive model for rubber-like materials / L. Hossa, R. J. Marczakb // *Computational Mechanics*. – 2010. – Vol. 29. – P. 2759–2773.
2. **Черных, К. Ф.** Законы упругости для изотропных несжимаемых материалов, феноменологический подход / К. Ф. Черных, И. М. Шубина // *Механика эластомеров*. – 1977. – Т. 1, Вып. 242. – С. 54–64.
3. Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки / С. Н. Коробейников, А. А. Олейников, А. Ю. Ларичкин, А. В. Бабичев, В. В. Алёхин // *Дальневосточный математический журнал*. – 2013. – Т. 13, № 2. – С. 222–249.
4. **Knowles, J. K.** On finite anti-plane shear for incompressible elastic materials / J. K. Knowles // *J. Austral. Math. Soc.* – 1976. – Vol. 19. – P. 400–639.
5. **Жуков, Б. А.** Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала / Б. А. Жуков // *Известия РАН МТТ*. – 2015. – № 3. – С. 127–135.
6. **Horgan, C.** Superposition of generalized plane strain on anti-plane shear deformations in isotropic incompressible hyperelastic materials / C. Horgan, G. Saccomandi // *Journal of Elasticity*. – 2003. – Vol. 73. – P. 221–235.
7. **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

References

1. Hossa L., Marczakb R. J. *Computational Mechanics*. 2010, vol. 29, pp. 2759–2773.
2. Chernykh K. F., Shubina I. M. *Mekhanika elastomerov* [Elastomer mechanics]. 1977, vol. 1, iss. 242, pp. 54–64.
3. Korobeynikov S. N., Oleynikov A. A., Larichkin A. Yu., Babichev A. V., Alekhin V. V. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal* [The Far East mathematical journal]. 2013, vol. 13, no. 2, pp. 222–249.
4. Knowles J. K. *J. Austral. Math. Soc.* 1976, vol. 19, pp. 400–639.
5. Zhukov B. A. *Izvestiya RAN MTT* [Proceedings of RAS. Solid State Mechanics]. 2015, no. 3, pp. 127–135.
6. Horgan S., Saccomandi G. *Journal of Elasticity*. 2003, vol. 73, pp. 221–235.
7. Lur'e A. I. *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear elasticity theory]. Moscow: Nauka, 1980, 512 p.

Андреева Юлия Юрьевна

старший преподаватель, кафедра
прикладной математики, Волгоградский
государственный технический
университет (Россия, г. Волгоград,
пр. Ленина, 28)

E-mail: ajj308@mail.ru

Andreeva Yuliya Yur'evna

Senior lecturer, sub-department of applied
mathematics, Volgograd State Technical
University (28 Lenina avenue,
Volgograd, Russia)

Жуков Борис Александрович

доктор технических наук, профессор,
кафедра прикладной математики,
Волгоградский государственный
технический университет (Россия,
г. Волгоград, пр. Ленина, 28);
профессор, кафедра алгебры, геометрии
и математического анализа,
Волгоградский государственный
социально-педагогический университет
(Россия, г. Волгоград, пр. Ленина, 27)

E-mail: zhukov.b.a@gmail.com

Zhukov Boris Aleksandrovich

Doctor of engineering sciences, professor,
sub-department of applied mathematics,
Volgograd State Technical University
(28 Lenina avenue, Volgograd, Russia);
professor, sub-department of algebra,
geometry and mathematical analysis,
Volgograd State Sociopedagogical
University (27 Lenina avenue,
Volgograd, Russia)

УДК 539.3

Андреева, Ю. Ю.

Точные аналитические решения одной задачи нелинейной теории упругости для двух потенциалов энергии деформации несжимаемого материала / Ю. Ю. Андреева, Б. А. Жуков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 2 (46). – С. 64–76. DOI 10.21685/2072-3040-2018-2-7.